1. **Множества. Основные определения. Способы задания. Специальные числовые множества. Простейшие свойства множеств.**

**Множества** – совокупность определенных, вполне различимых элементов, рассматриваемых как единое целое.

A={a,b,c,d,e,f}

Во множестве не может быть одинаковых элементов и порядок не имеет значения.

Множество, которое не содержит ни одного элемента – **пустой множество**.

**Способы задания множества:**

1. Перечисление множества
2. Описание множества
3. Графическое

**Основные числовые множества:**

1. *N* – множество всех натуральных чисел;
2. *Z* – множество целых чисел;
3. *Q* – множество рациональных чисел;
4. *J* – множество иррациональных чисел;
5. *R* – множество действительных чисел.
6. **Понятие подмножества. Диаграммы Эйлера-Венна. Основные операции над множествами.**

Если каждый элемент множества В является также элементом множества А, множество В называется **подмножеством** множества А.

**Диаграммы Эйлера-Венна** – это наглядное средство для работы со множествами. На этих диаграммах изображаются все возможные варианты пересечения множеств.

**Основные операции над множествами:**

1. **Объединением (суммой)**множеств А и В называется множество А ∪ В, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.  
   Например, если А={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то А ∪ B = {1,2,3,4,5,6}
2. **Пересечением (произведением)** множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.  
   Например, если А={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}
3. **Разностью** множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множеству А, но не принадлежат множеству В.  
   Например, если А={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то АВ = {1,2}
4. **Соотношения между множествами. Основные операции над множествами. Универсальное множество. Дополнение множества.**

**Универсальное множество I** – множество, которое содержит все возможные элементы, рассматриваемые в данном контексте.

**Дополнение множества** – элементы универсального множества I, не принадлежащие к множеству , которое обозначается .

1. **Мощность множества. Особенности сравнения конечных и бесконечных множеств.**

Количество элементов во множестве – **мощность.**

**Конечное множество** – множество, состоящее из конечного числа элементов.

**Бесконечное множество** – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

1. **Мощность множества. Счетные и несчетные множества.**

Множество **счётно**, если оно состоит из конечного числа элементов.

Множество **несчётно**, если оно бесконечно и неравномощно множеству натуральных чисел.

1. **Разбиение множеств. Симметрия в элементарной алгебре и алгебре множеств.**

**Разбиение множества** — это представление его в виде объединения произвольного количества попарно непересекающихся подмножеств.

1. **Тождества алгебры множеств и методы их доказательства.**
2. Коммутативность





1. Ассоциативность





1. Дистрибутивность





1. Пустое и универсальное множество













1. Закон де Моргана





1. **Упорядоченные множества. Геометрическая интерпретация. Прямое (декартово) произведения множеств. Проекция множества.**

**Упорядоченное множество** – множество вместе с заданным на нем отношением порядка.

**Декартовым произведением** множеств А и В называется множество пар, первые элементы которых принадлежат множеству А, вторые – множеству В.

**Проекцией множества** называется множество проекций соответствующих кортежей.

1. **Соответствия. Множества, определяющие соответствия. Виды соответствий.**

**Соответствием** между множествами А и В называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств***.***

**Виды соответствий:**

1. Полностью определенное
2. Частичное
3. Сюръективное
4. Однозначное (функциональное)
5. Инъективное (обратимое)
6. Биективное – одновременно полностью определенное, сюръективно и инъективно.
7. Взаимно однозначное - одновременно полностью определенное, сюръективно, функционально и инъективно.
8. **Обратное соответствие. Композиция соответствий.**

Для каждого соответствия существует **обратное соответствие**, которое получается, если данное соответствие рассматривать в обратном порядке. Соответствие, обратное соответствию обозначается .  
Композиция соответствия – это последовательное применение двух соответствий.

1. **Отображения и их свойства. Отображения, заданные на одном множестве.**

**Отображением множества** Xво множество Yназывается правило, по которому каждому элементу множества Xставится в соответствие один или несколько элементов множества Y.

Отображения, заданные на одном множестве, называются **отношением**.

1. **Функция, функционал, оператор.**

В том случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется оператором, отображение нечислового множества X в числовое множество Yназывается функционалом, отображение числового множества X в числовое множество Y называется функцией и обозначается y = f(x).

1. **Отношения и их свойства.**

**Свойства отношений:**

1. Связанные с одним элементов x:

* Рефлексивность
* Антирефлексивность

1. Связанные с двумя элементами x и y:

* Симметричность
* Антисимметричность

Несимметричность

1. Связанные с тремя элементами x, y и z:

* Транзитивность

1. **Понятия о высказываниях. Простые и составные высказывания. Основные логические операции – отрицание, логическое сложение, логическое умножение.**

**Высказывание** – утверждение, которое является истинным или ложным.

**Простое высказывание** – высказывание, в котором никакая его часть сама не является высказыванием.

**Составное высказывание** – высказывание, которое строится из простых с помощью логических операций.

**Основные логические операции:**

1. Отрицание – присоединение частицы НЕ.
2. Дизъюнкцией двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначение: AVB
3. Конъюнкцией двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, которое истинно в том и только в том случае, если истинны оба высказывания. Обозначение: AɅB
4. **Понятие о высказываниях. Иллюстрации операций над высказываниями таблицами истинности и комбинационными схемами.**

**Таблица истинности** – таблица, определяющая значения сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний.

1. **Понятие о высказываниях. Логическое отношение импликация, операция эквивалентности. Понятие о тавтологии.**

**Импликация** – соединение двух простых высказываний в составное высказывание с помощью союза "если.., то..". Обозначается горизонтальной стрелкой “→”.

1 и 1 = 1

1 и 0 = 0

0 и 1 = 1

0 и 0 = 1

**Эквивалентность** – соединение двух простых высказываний A и B в одно с использованием оборота речи "тогда и только тогда, когда". Обозначается “~”.

**Тавтология –** тождественно истинное высказывание, инвариантное относительно своих компонентов.

1. **Булевы функции. Их определение и способы задания. Число булевых функций. Понятие о лексикографическом порядке.**

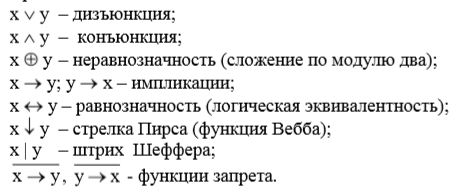
Функция f, принимающая одно из двух значений, 0 или 1, от *n* переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений, 0 или 1, называется **булевой функцией** от *n* переменных.

**Способы задания:**

1. Табличный
2. Графический
3. Аналитический

**Число N различных булевых функций** от *n* логических переменных есть

1. **Булевы функции двух логических переменных.**



1. **Способы задания булевых функций произвольного числа переменных. Полностью и частично определенные булевы функции. Конституенты единицы и нуля. Несущественные (фиктивные) переменные.**

**Задать булеву функцию** – значит указать значения, которые принимает эта функция (т.е. 0 или 1) на всех наборах аргументов.

Логическая функция называется **полностью определенной**, если для нее заданы значения по всем возможным наборам.

Логическая функция называется **частично определённой**, если для некоторых наборов значения функции не заданы.

Булеву функцию n аргументов, которая принимает значение, равное единице, только на одном наборе переменных, называют **конституентой единицы**.

Булеву функцию n аргументов, которая принимает значение, равное нулю, только на одном наборе переменных, называют **конституентой нуля**.

Говорят, что булева функция  **существенно зависит от переменной** , если выполняется условие ).

В противном случае ее называют **фиктивной** переменной.

1. **Старшинство логических операций. Принцип двойственности в булевой алгебре. Законы булевой алгебры, их иллюстрация комбинационными схемами.**

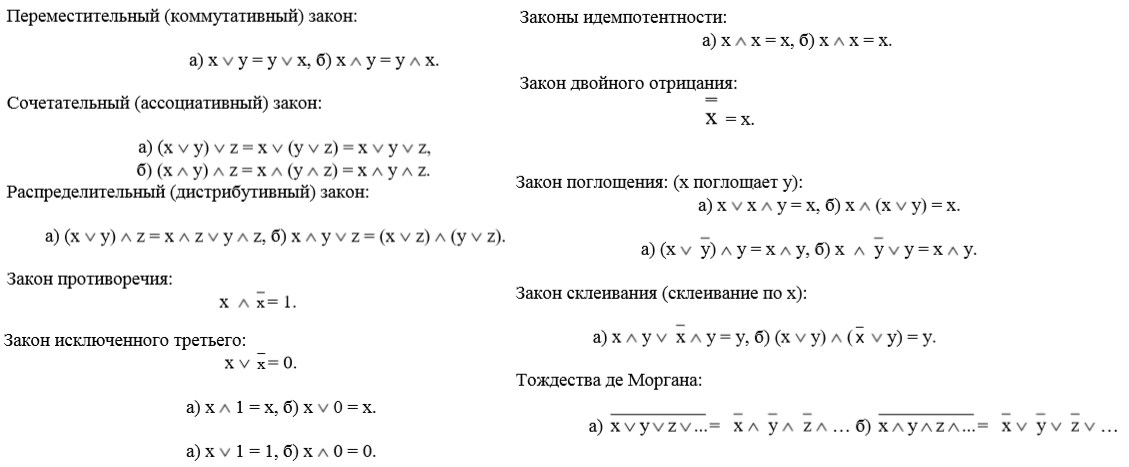
**Порядок выполнения логических операций:**

1. Инверсия
2. Конъюнкция
3. Дизъюнкция
4. Импликация
5. Эквивалентность

Функция   называется **двойственной** к функции  , если

.

**Законы булевой алгебры:**



1. **Тождества булевой алгебры для одной и двух переменных. Методы их доказательства и иллюстрация комбинационными схемами. Применение принципа двойственности.**

**Теорема** (*принцип двойственности*). Если формула F задает булеву функцию , то двойственная ей формула F\* задает двойственную функцию  .

1. **Построение булевой формулы по таблице истинности. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальная форма.**

**Правила построения логической функции по ее таблице истинности:**

1. Выделить в таблице истинности те строки, в которых значение функции равно **1**.
2. Выписать искомую формулу в виде дизъюнкции нескольких логических элементов. Число этих элементов равно числу выделенных строк.
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции записать в виде конъюнкции аргументов функции.
4. Если значение какого-либо аргумента функции в соответствующей строке таблице равно***0***, то этот аргумент взять с отрицанием.

**Совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в которой каждая переменная входит только один раз.

**Совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ) называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в которой каждая переменная входит только один раз.

1. **Карты Карно и их связь с таблицами истинности. Построение булевых формул по картам Карно.**

**Карты Карно** — графический способ минимизации булевых функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями.

1. **Построение булевой формулы по комбинационной схеме.**
2. **Минимизация булевой функции по карте Карно.**
3. Заполнить карту Карно нулями и единицами в соответствии с таблицей истинности.
4. Покрыть все единичные наборы минимальным количеством прямоугольников Карно, каждый из которых имеет максимальную площадь.
5. Каждому прямоугольнику Карно соответствует одна импликанта, причем, если в границах прямоугольника Карно какая-либо переменная принимает значение как 0, так и 1, то она склеивается.
6. **Функциональная полнота систем логических функций.**

Множество функций N называется **функционально полной системой** (ФПС), если любая булева функция представима суперпозицией функций из N.

1. **Исчисление предикатов. Основные определения (базисное множество, значение предиката, множество истинности).**

**Предикат** – утверждение, содержащее переменные.

Пусть  – m-мерное подмножество множества *J*. Множество K называют **базисным множеством**, если отвечающие ему векторы  являются линейно не­зависимыми, т.е. образуют базис в пространстве .

**Множеством истинности предиката** *A* (*x*), *x* ϵ *X* называется подмножество *T*⸦*X*, на котором *A* (*x*) истинно.

1. **Исчисление предикатов. Основные операции над предикатами. (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание).**

**Отрицанием предиката**  называется новый предикат, обозначаемый  и являющийся ложным для тех и только тех , для которых предикат  истинный.

**Конъюнкцией предикатов**  и  называется новый предикат, обозначаемый ∧ и являющийся истинным для тех и только тех , для которых предикаты  и  истинны.

**Дизъюнкцией предикатов**  и  называется новый предикат, обозначаемый ∨и являющийся ложным для тех и только тех , для которых предикаты и ложны.

1. **Исчисление предикатов. Основные операции над предикатами. (равнозначность, импликация) и их графическая интерпретация.**

**Импликацией предикатов**  и  называется новый предикат, обозначаемый → и являющийся ложным для тех и только тех , для которых предикаты  истинный, а  ложный.

**Эквиваленцией предикатов**  и  называется новый предикат, обозначаемый ↔ и являющийся истинным для тех и только тех , для которых предикаты  и  имеют одинаковые значения.

1. **Исчисление предикатов. Операции квантификации.**

**Квантификация предиката (навешивание квантора на переменную)** – операция уточнения объема предиката суждения.

**Квантор всеобщности**. Высказывание истинное, когда истинно для каждого элемента из множества , и ложное – в противном случае.

**Квантор существования**. Высказывание истинное, когда существует элемент множества , для которого P(x) истинно, и ложное – в противном случае.

1. **Нечёткие множества. Области применимости нечётких математических объектов. Характеристическая функция принадлежности для обычных и нечётких множеств.**

Под нечетким множеством понимается совокупность упорядоченных пар, составленных из элемента универсального множества и соответствующих степеней принадлежности :

,

причем – функция принадлежности, указывающая в какой степени элемент принадлежит нечёткому множеству . Функция принимает значения в некотором множестве . Множество называют множеством принадлежности, часто в качестве выбирается отрезок . Если множество (то есть состоит только из 2-х элементов), то нечёткое множество может рассматриваться как обычное четкое множество.

1. **Элементы общей алгебры. Понятие об алгебраическое системе. Основные определения.**

**Алгебраическая система** — множество с заданным на нём набором операций и отношений.

**Алгебраической операций** на множестве А называется *n*-местная функция .

**Отношением** на множестве A называется подмножество *n*-ой декартовой степени  множества .

1. **Полугруппа, моноид, группа, их аксиоматика.**

**Полугруппа** – алгебраическая система с одной ассоциативной операцией.

**Моноид** – это полугруппа в которой присутствует единичный элемент относительно операции.

**Группа** – это моноид в котором присутствует обратный элемент относительно операции.

1. **Подгруппа. Построение циклической подгруппы данной группы.**

**Подгруппа** – подмножество группы, которое само является группой.

**Циклическая группа** – группа в которой все её элементы являются степенями одного и того же элемента.

**Любая подгруппа циклической группы есть циклическая группа.**

1. **Разложение группы на смежные классы по подгруппе.**

**Левым смежным классом** группы G по подгруппе H называется множество элементов вида:

**Правым смежным классом** группы G по подгруппе H называется множество элементов вида:

где – фиксированный элемент группы G.

1. **Пример группы с операцией сложения по mod p.**

Сложение по модулю 3 – остаток от деления суммы на 3.

1. **Элементы общей алгебры. Кольцо, поле, их аксиоматика.**

**Кольцом** называется множество элементов, на котором определены две операции – сложение и умножение, и в выполняются следующие аксиомы:

1. Множество является аддитивной абелевой группой.
2. Для любых двух элементов и из выполняется коммуникативный закон
3. Для любых трех элементов и из выполняется ассоциативный закон
4. Для любых трех элементов и из выполняется дистрибутивный закон

**Поле** – множество, которое является аддитивной абелевой группой; ненулевые же элементы этого множества образуют мультипликативную абелевую группу, и выполняется закон дистрибутивности.